

Elisabetta Robotti, Antonella Censi,  
Laura Perailon e Ida Segor

# Frazioni sul filo

Strumenti e strategie  
per la scuola primaria

COLLANA

*Antefatti* intelligenti

Erickson

Nell'ambito dell'apprendimento della matematica, le frazioni costituiscono un ostacolo a volte insormontabile per molti alunni della scuola primaria, con conseguenze e difficoltà che si ripercuotono anche nei gradi scolastici superiori. Al riguardo, la ricerca scientifica più recente ha evidenziato come l'approccio didattico tradizionale, che si serve di rappresentazioni e modelli concreti (ad esempio quello di «torta» o «pizza»), non sempre risulti adeguato a veicolare la complessità cognitiva e concettuale del significato di frazione.

Proprio dalla collaborazione fra ricerca universitaria e scuola nasce il progetto *Frazioni sul filo*, che attraverso l'uso di «artefatti intelligenti» propone un'originale ed efficace strategia per l'insegnamento-apprendimento delle conoscenze e delle abilità legate a quest'area della matematica.

Dopo un breve inquadramento teorico, il volume presenta un percorso didattico articolato in 4 sezioni operative, ciascuna preceduta da una guida pratica all'utilizzo dei materiali proposti e incentrata su un diverso artefatto: la *tovaglietta*, la *striscia* di carta quadrettata, la *retta* dei numeri, il *filo* delle frazioni. Le numerose attività e schede e i 20 cartoncini con le frazioni allegati fanno di questo libro un prezioso strumento pronto all'uso per gli insegnanti di matematica delle ultime tre classi della scuola primaria.



**COLLANA**

**Artefatti intelligenti**

*Dal fare al sapere: Artefatti intelligenti  
per costruire significati matematici*

**Collana diretta da**

Daniela Lucangeli

**Comitato scientifico-editoriale**

Maria Giuseppina Bartolini Bussi

Maria Alessandra Mariotti

Anna Baccagnini-Frank

ISBN 978-88-590-1013-5



€ 19,50

libro + allegati  
indivisibili

# Indice

- 7** Introduzione
- 9** PARTE 1 – Insegnamento-apprendimento delle frazioni nella scuola primaria
- 11** CAP. 1 Problematiche legate all'insegnamento-apprendimento delle frazioni nella scuola primaria
- 23** CAP. 2 Quadro teorico di riferimento
- 33** Bibliografia
- 35** PARTE 2 – Gli Artefatti
- 37** SEZ. 1 Introduzione del concetto di frazione e di unità frazionaria con la *tovaglietta*
- 87** SEZ. 2 Oltre l'unità di misura con la *striscia*
- 125** SEZ. 3 Posizionamento delle frazioni sulla *retta*
- 155** SEZ. 4 I numeri razionali come classi di equivalenza e la densità di  $\mathbb{Q}$  con il *filo*

# Introduzione

Il libro *Frazioni sul filo* è significativo da diversi punti di vista: affronta un tema delicato, quello delle frazioni, ritenuto difficile dagli insegnanti e dai ricercatori di diversi Paesi; è scritto da un gruppo misto Università-Scuola, nel quale un ricercatore universitario ha collaborato con insegnanti della scuola primaria; mette in campo artefatti molto «poveri», che i primi sperimentatori dell'itinerario didattico hanno costruito in casa con le loro mani.

Ciascuno di questi punti merita un commento.

*Le difficoltà.* Le frazioni sono un tema difficile, come emerge dalla rassegna presentata nel primo capitolo del libro. Nel percorso storico, la rappresentazione dei numeri razionali attraverso le frazioni (o meglio le classi di frazioni equivalenti) ha preceduto la rappresentazione con i numeri con la virgola. Tuttavia, in questo caso, la rappresentazione più antica, già presente nel *Liber Abaci* di Leonardo Fibonacci, non è la più agevole e naturale per gli allievi di oggi. Le difficoltà nel costruire il significato di frazione e nell'operare con le frazioni sono «universalmente» condivise, almeno in tutto il mondo occidentale, mentre sembrano minori in alcune lingue e culture (ad esempio quella cinese) in cui l'espressione linguistica è più vicina alla genesi antica della frazione come parte. Questa osservazione apre spazi interessanti per un'ulteriore discussione sulle buone pratiche d'insegnamento e, forse, sull'opportunità di «osare» introdurre, almeno temporaneamente, un modo di dire diverso, che renda la via più facile.

*La collaborazione.* La tradizione della collaborazione paritetica Università-Scuola ha, in Italia, radici antiche. È utile qui ricordare un piccolo estratto della relazione finale tenuta da Giovanni Prodi all'ottavo Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica nel 1991:

È importante mantenere un contatto con la scuola: i *gruppi misti Università-Scuola* possono avere un ruolo importantissimo sia nella diffusione dell'innovazione didattica sia nella ricerca didattica. Questi gruppi esigono l'adozione di un rapporto realmente paritetico: gli insegnanti della scuola pre-universitaria che sono chiamati a partecipare a una ricerca didattica devono farlo a pieno titolo, e non solo come ausiliari incaricati di raccogliere dati e protocolli.

*Gli artefatti.* La tovaglietta, la striscia, la retta, il filo sono artefatti con diversa materialità, ma tutti «intelligenti» nel senso che la loro introduzione, da un lato,

risponde a esigenze epistemologiche e cognitive e, dall'altro, crea una continuità ideale tra alcuni di essi (la striscia si schiaccia e diventa una retta, che si materializza di nuovo in un filo, un filo da bucato su cui «stendere» le frazioni). Ci sono, a spirale, andate e ritorni, in cui, ad esempio, l'equivalenza di frazioni torna a più riprese su artefatti e con immagini diverse, anche se collegate. L'impressione è che il ritorno sul materiale concreto apra la possibilità di recuperare gli allievi che si sono persi.

Ci sono stati e ci sono, quindi, vari buoni motivi per accogliere questo libro nella collana «Dal fare al sapere: Artefatti intelligenti per costruire significati matematici» e per augurare ad esso molta fortuna.

Reggio Emilia, dicembre 2015

*Maria G. Bartolini Bussi*

# PARTE 1

INSEGNAMENTO-  
APPRENDIMENTO DELLE  
FRAZIONI NELLA SCUOLA  
PRIMARIA

## Problematiche legate all'insegnamento-apprendimento delle frazioni nella scuola primaria

Le frazioni sono da sempre, e non solo in Italia, una parte fondamentale del curriculum di matematica della scuola primaria. Nonostante ciò, il significato di frazione costituisce una difficoltà per gli alunni anche di livelli scolari superiori e, spesso, è vissuto dagli insegnanti come difficile da costruire. Lo dimostrano le prove di valutazione nazionale (INVALSI) di cui citeremo, in seguito, alcuni risultati.

L'approccio al significato di frazione nella scuola primaria dei diversi Paesi sembra avere una caratteristica comune: richiede di dividere un'*unità* concreta in parti *uguali*. Questa è un'idea piuttosto intuitiva e facilmente modellizzabile nel contesto di vita quotidiana. I bambini, infatti, hanno presente che cosa significhi prendere metà mela o ripartire un certo numero di caramelle fra tre amici.

Normalmente, gli insegnanti considerano come *unità* modelli continui (pizza, torta, cioccolata, ecc.) o discreti (quantità di biglie, di caramelle, ecc.) di cui si chiede la distribuzione ad amici o persone in parti uguali. Così,  $\frac{3}{4}$  rappresenta l'operazione di dividere una torta (una pizza, una quantità di caramelle, ecc.) in quattro parti *uguali*, prendendone poi tre. La ricerca ha chiaramente mostrato come questo modello possa rappresentare un potenziale ostacolo didattico per la costruzione del significato di frazione: che cosa significa, allora,  $\frac{5}{4}$ ?

Per rappresentare la frazione  $\frac{5}{4}$  con il modello della torta, è necessario infatti considerare due torte, ciascuna delle quali verrà divisa in quattro parti uguali prendendone poi 5. Cosa rispondere però agli alunni che «vedono»  $\frac{5}{8}$  in questa rappresentazione? In altre parole, come e perché considerare solo 4 delle fette che il modello rappresenta?

È facile allora capire come la complessità concettuale e cognitiva relativa all'insegnamento-apprendimento delle frazioni possa sfuggire agli insegnanti.

Ci chiediamo perché, dunque, l'insegnamento delle frazioni alla scuola primaria sia così diffusamente connesso a questo approccio.

La ricerca ha messo in evidenza che la scelta degli insegnanti cade su un «oggetto concreto di riferimento» perché rispondente a certe caratteristiche quali: essere percepito come familiare, e quindi in certa misura rassicurante e motivante, ed essere chiaramente unitario e, quindi, non aver bisogno di ulteriori spiegazioni o definizioni (Fandiño Pinilla, 2007). La torta (o la pizza), da distribuire in parti uguali a due o tre bambini, risponde appunto a queste caratteristiche.

# PARTE 2

## GLI ARTEFATTI

# Sezione 1

## INTRODUZIONE DEL CONCETTO DI FRAZIONE E DI UNITÀ FRAZIONARIA CON LA TOVAGLIETTA

- Introduzione all'artefatto
- Guida alle attività per l'insegnante
- Materiali operativi per l'alunno

# GUIDA ALLE ATTIVITÀ PER L'INSEGNANTE

## ATTIVITÀ 1 La lettera del pizzaiolo

### Materiali

- La lettera del pizzaiolo (si veda la traccia proposta)
- Fogli formato A4 bianchi (anche di riciclo)

### Allestimento e consegne

- Attività a piccolo gruppo
- Attività individuale
- Attività collettiva (discussione matematica)

Raccontiamo di aver ricevuto una lettera da un pizzaiolo che, volendo inaugurare la sua nuova pizzeria, desidera abbellire le sue tavole con delle tovagliette colorate.

Ciao bambini,  
sono il pizzaiolo Nino e avrei bisogno del vostro aiuto.  
L'anno prossimo aprirò una pizzeria e avrei bisogno di tante  
belle tovagliette da mettere sui tavoli. Vorrei che le tovagliette  
fossero composte da diverse parti colorate che possono essere due,  
tre, quattro o anche di più!  
Ognuna di queste parti deve essere ricavata dividendo la  
tovaglietta in parti rigorosamente della stessa grandezza.  
Sono sicuro che vi divertirete a trovare tante combinazioni  
possibili!

Aspetto la vostra risposta, ciao a presto!

**Nino**

c/o pizzeria Il Buongustaio

Dividiamo la classe in gruppi di non più di 4 o 5 alunni, per non rendere dispersivo il lavoro.

Chiediamo ai bambini di ciascun gruppo di dividere in parti uguali alcuni fogli bianchi A4 che rappresentano il modello delle tovagliette; possono dividere il foglio in tante parti quante desiderano, l'importante è che siano uguali.



**NOTA:** Il testo della lettera potrebbe risultare di difficile comprensione per i bambini. Si suggerisce pertanto di mediarne la comprensione e di chiedere, come suggerito sopra, di dividere il modello della tovaglietta (foglio A4 bianco) dapprima in parti uguali (in mezzi, in quarti, ecc.) e di comporre con queste parti una tovaglietta. Solo successivamente, si chiederà ai bambini di comporre tovagliette con unità frazionarie diverse (figura 1.7, Attività 6). Il percorso didattico qui descritto, comunque, guiderà passo passo l'insegnante nella gestione di questa variabile didattica.

### Come costruire i significati matematici in gioco

Dividere in parti uguali il foglio A4 è utile per costruire il significato di frazione come parte di un tutto: il foglio, considerato come unità di misura, sarà diviso in unità frazionarie (figure 1.1 e 1.2).

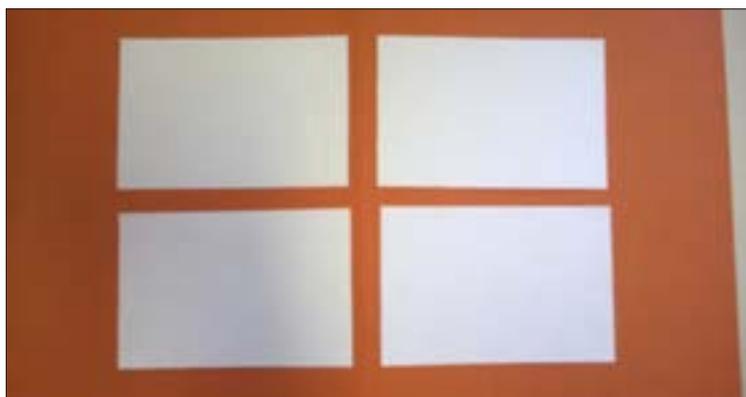


Fig. 1.1 Foglio diviso in quattro parti uguali.



Fig. 1.2 Foglio diviso in due parti uguali.

I bambini cercheranno diverse strategie per adempiere il compito, ad esempio facendo ricorso al righello o alle piegature.

L'insegnante dovrà fare particolare attenzione alle strategie usate perché possono presentarsi alcuni errori ricorrenti (si vedano alcuni esempi di errori presentati nell'Attività 2). Ad esempio, poiché le misure delle dimensioni del foglio A4 non sono intere (21 cm x 29,7 cm), gli alunni potrebbero non usare tutto il foglio come modello della tovaglietta eliminandone la parte in disavanzo rispetto alla misura intera.

## ATTIVITÀ 2 Dividere in parti uguali

### Materiali

- I lavori dei bambini
- Fogli A4
- Gommina rimovibile (patafix)
- Forbici
- Righello
- Scheda 1



**NOTA:** Alcune schede relative alle diverse sezioni contengono parti colorate. Segnaliamo agli insegnanti che intendono produrne fotocopie che il colore ha un ruolo molto importante. Pertanto, qualora non si possano effettuare fotocopie a colori, si consiglia di riportare su ciascuna fotocopia i colori presenti nella scheda.

### Allestimento e consegne

- Attività a piccolo gruppo
- Attività individuale
- Attività collettiva (discussione matematica)

L'insegnante raccoglie i lavori dei gruppi prodotti nell'Attività 1 e li espone alla lavagna utilizzando la gommina, in modo che siano visibili a tutti.

A ciascun gruppo sarà chiesto di spiegare la strategia utilizzata per ottenere le parti uguali nella suddivisione della tovaglietta.

Come variazione potrebbe essere utile chiedere ai gruppi di scrivere la spiegazione della strategia utilizzata, in quanto la comunicazione scritta spesso costringe gli alunni ad essere più precisi e dettagliati nel giustificare le proprie scelte.

Per avviare la discussione sull'osservazione dei lavori svolti, l'insegnante può chiedere:

Chi di voi ha rispettato le consegne del pizzaiolo? Come possiamo essere sicuri che le tovaglette siano state divise in parti uguali?

## Come costruire i significati matematici in gioco

In questa attività si vuole:

- consolidare il concetto di unità frazionaria come parte di un'unità di misura;
- confrontare le stesse unità frazionarie mettendo in evidenza il fatto che possono non essere congruenti ma sono certamente equivalenti (verifica attraverso tagli, piegature, ecc.);
- confrontare diverse unità frazionarie.

Per verificare l'equivalenza delle stesse unità frazionarie, alcuni bambini potrebbero proporre la misura dei lati dei «pezzi» (unità frazionarie) in cui è stata divisa la tovaglietta, altri la sovrapposizione delle parti.

In questo secondo caso l'insegnante stimolerà l'utilizzo delle isometrie. Le unità frazionarie, infatti, potranno essere sovrapposte per traslazione, per rotazione o con simmetria.

A titolo esemplificativo si veda la figura 1.1, dove le unità frazionarie in cui è stato ripartito il foglio devono essere traslate mentre, nel caso della figura 2.2, la validazione dell'equivalenza delle parti ottenute è possibile ruotando una delle due di 180°.

Per provare l'equivalenza delle stesse unità frazionarie ricavate con ripartizioni diverse del foglio, sarà possibile anche scomporre le figure che rappresentano le unità frazionarie in sotto-figure e ricomporle in modo da verificare l'equivalenza (figura 1.3).

È importante che i bambini operino concretamente per validare l'equivalenza delle unità frazionarie usando piegature, forbici o righello perché in questa fase l'approccio cinestetico e tattile consente, anche ai bambini più in difficoltà, di costruire immagini mentali da associare al concetto di unità frazionaria e di unità di misura.

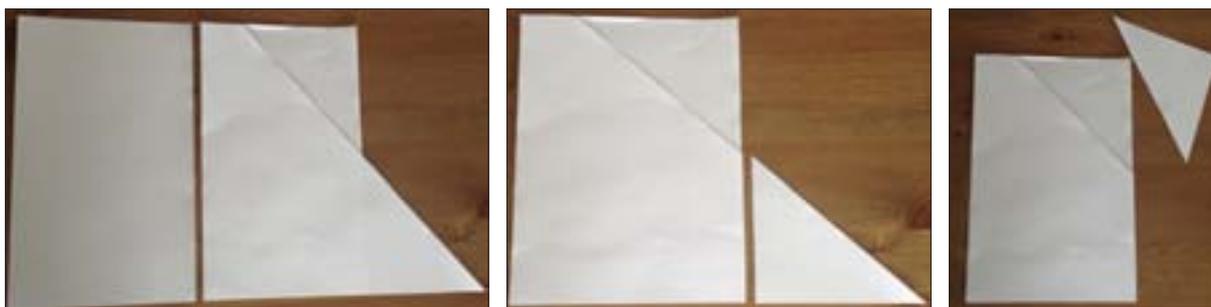


Fig. 1.3 Verifica dell'equivalenza di due diversi modelli dell'unità frazionaria  $\frac{1}{2}$ .

I gruppi che non hanno rispettato le consegne o che per imprecisione non hanno ottenuto parti uguali dovranno rimettersi al lavoro.

L'insegnante dovrà fare attenzione agli errori che possono emergere nelle strategie di soluzione (figure 1.4 e 1.5). Eccone alcuni:

- non ripartire in parti uguali o non utilizzare completamente il foglio A4 (modello della tovaglietta);

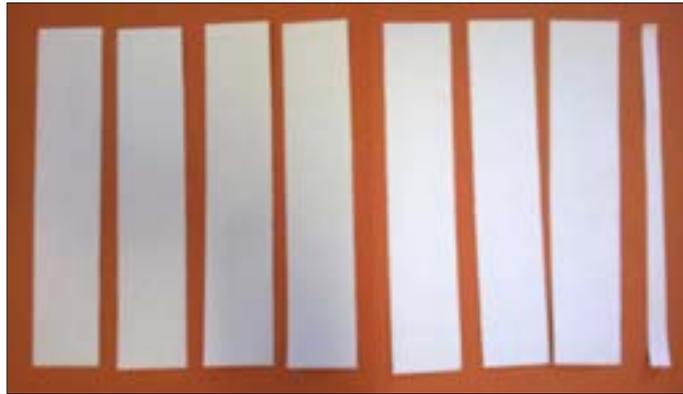


Fig. 1.4 Il foglio A4 non è ripartito in parti uguali.

- piegare tante volte su se stesso il foglio creando uno spessore tale da rendere le parti non equivalenti.

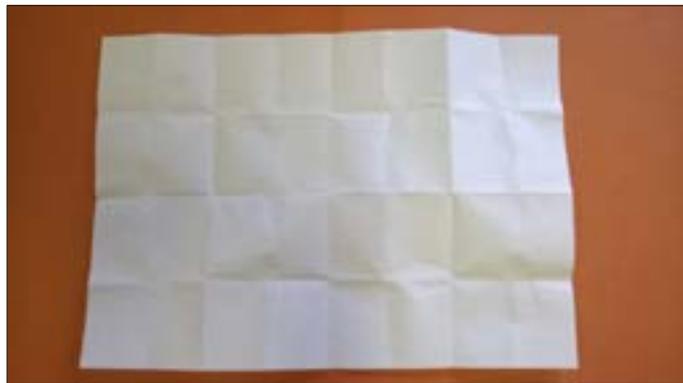


Fig. 1.5 Piegature del foglio A4 per ripartirlo in parti uguali.

### ATTIVITÀ 3 Il nome delle frazioni

#### Materiali

- Gli elaborati dei bambini (diverse unità frazionarie)
- Schede 2, 3, 4, 5, e 6

#### Allestimento e consegne

- Attività a piccolo gruppo
- Attività individuale
- Attività collettiva (discussione matematica)

L'attività riparte dall'osservazione delle diverse ripartizioni delle tovagliette. I bambini dovranno spiegare come hanno verificato l'equivalenza delle stesse unità frazionarie (per isometrie, misurando, tagliando, ecc.). La spiegazione può essere fatta prima per iscritto e poi condivisa con i compagni.

A ogni gruppo vengono consegnati dei fogli A4 (modello delle tovagliette) e viene chiesto loro di dividerli in parti uguali (due parti uguali, tre parti uguali, quattro parti uguali, cinque, sei, otto e dieci parti uguali). In seguito, si chiede di colorare una sola delle unità frazionarie ottenute ( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{2}{10}$ ).

La consegna, quindi, potrebbe essere:

Dividete in due parti uguali il foglio, poi, prendendo altri fogli, divideteli in tre, in quattro, in cinque, in sei, in otto e in dieci parti uguali. Poi, in ciascun foglio, colorate una sola parte.

## Come costruire i significati matematici in gioco

L'attività serve per:

- elaborare un primo approccio alla sintassi della notazione frazionaria;
- denominare diverse unità frazionarie (ad esempio, «un quarto» ma anche «di quattro parti, una»).

Per costruire la denominazione delle diverse unità frazionarie, l'insegnante chiederà a ogni gruppo, al termine del lavoro, di illustrare alla classe in quante parti è stata divisa la tovaglietta (ad esempio, in quattro parti) e di proporre come denominare la parte colorata (ad esempio, «una di quattro» oppure «una su quattro»).

L'insegnante potrebbe chiedere:

Abbiamo diviso la tovaglietta in «quattro» parti e ne abbiamo colorata una. Come possiamo chiamare questa parte?

L'insegnante interverrà per introdurre sia l'espressione «un quarto» sia l'espressione «di quattro parti, una».

Stimolerà inoltre la ricerca lessicale della definizione «una su quattro» e anche «di quattro, una» e l'introduzione della scrittura frazionaria  $\frac{1}{4}$ . In genere, i bambini conoscono già i termini come quarti o mezzi, sarebbe quindi opportuno partire dalle tovagliette divise in quattro o due parti per poi estendere il lessico alle altre unità frazionarie.

## ATTIVITÀ 4 Le unità frazionarie

### Materiali

- Fogli colorati A4
- Scatole vuote
- Schede 7 e 8

### Allestimento e consegne

- Attività a piccolo gruppo
- Attività individuale
- Attività collettiva (discussione matematica)

Dopo aver diviso la classe in gruppi, si consegnano diversi fogli A4 di un determinato colore (ad esempio giallo, come in figura 1.6) e si chiede di realizzare una certa unità frazionaria ma in diverse forme.



Fig. 1.6 I «mezzi» sono gialli.

Si inizierà producendo solo i mezzi, nei diversi modi possibili. L'attenzione, però, sarà focalizzata prevalentemente sulle forme più semplici perché, nelle attività successive, saranno più fruibili per la composizione delle tovagliette.

I diversi mezzi costruiti saranno raccolti in una scatola etichettata con «scatola dei mezzi». Così accadrà anche per le altre unità frazionarie.

L'etichetta sulla scatola sarà scritta in notazione frazionaria ( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ , ...).

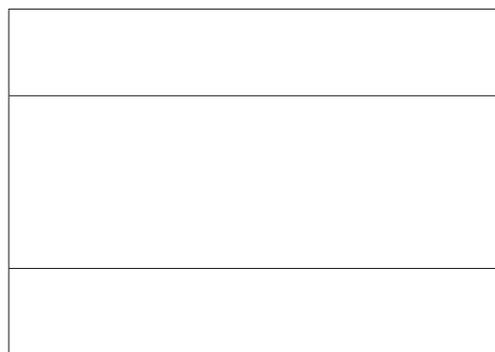
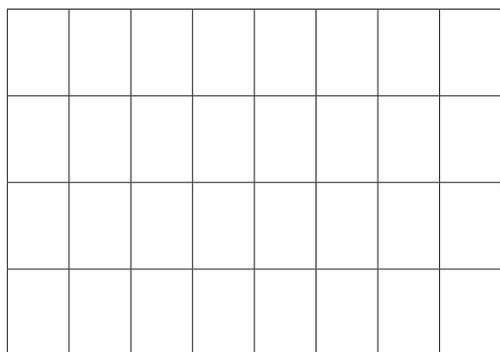
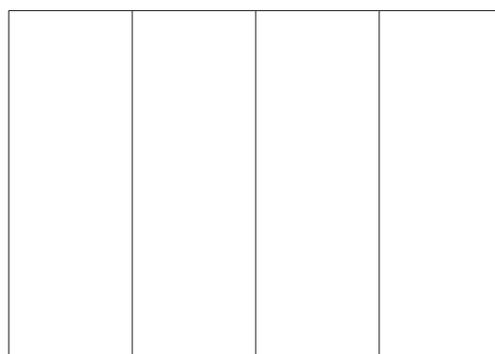
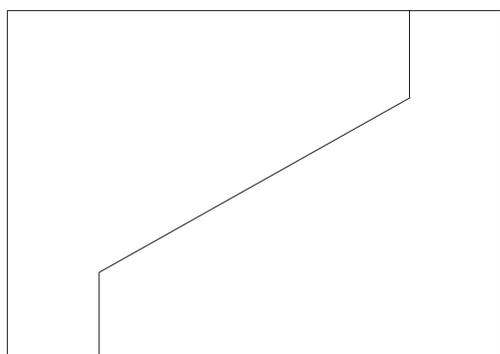
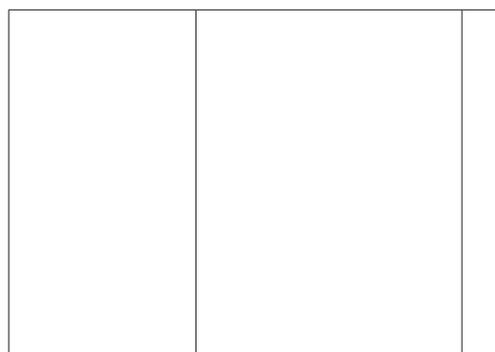
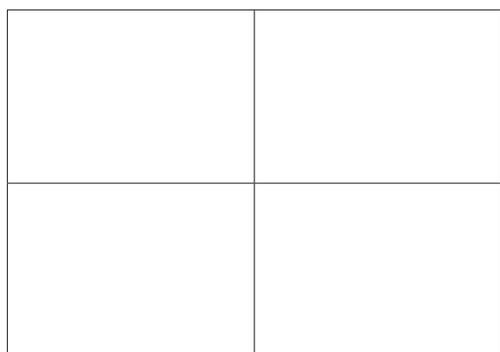
Si consiglia di proporre lo stesso percorso per terzi, quarti, decimi, sedicesimi, ecc., in modo da avere tante scatole con le diverse unità frazionarie, ciascuna realizzata con un colore ben definito (figura 1.7). Il colore sarà poi utilizzato come identificatore delle unità frazionarie quando sarà chiesto ai bambini di comporre le tovagliette (fogli A4).



Fig. 1.7 Scatole dei mezzi, dei quarti, ecc.

# SCHEDA 1

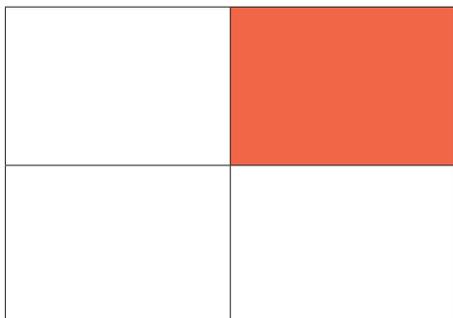
- Segna con una crocetta le tovagliette che sono state divise in parti uguali.



## SCHEDA 2

- In ogni tavoletta indica, in lettere e in cifre, l'unità frazionaria colorata.

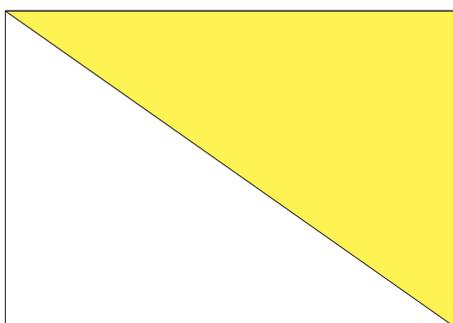
Esempio:



Di quattro parti, una

Un quarto

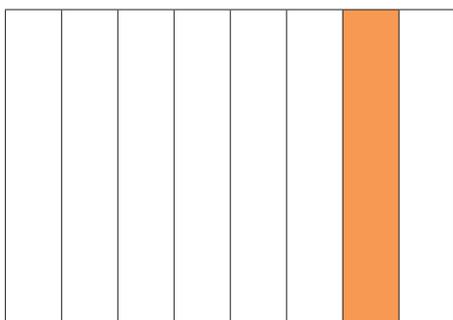
$$\frac{1}{4}$$



---

---

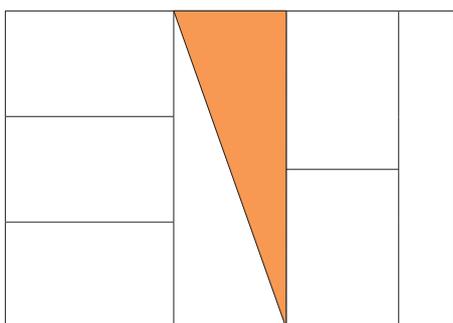
---



---

---

---



---

---

---

## SCHEDA 9

- Osserva la tovaglietta di riferimento, poi collega ogni unità frazionaria alla sua scatola.

The activity is set on a grid background. At the top left is a large empty rectangle representing the reference napkin. Below it are four rows, each with a 3D box on the left and a 2D colored rectangle on the right. The boxes are labeled with fractions:  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{12}$ , and  $\frac{1}{2}$ . The colored rectangles are: a red vertical bar, a yellow square, a blue vertical bar, and a green square.

## SCHEDA 16

- Confronta le unità frazionarie usando i simboli  $<$   $>$   $=$ .

Esempio:

$$\frac{1}{5} \boxed{>} \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{2} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{8} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{10} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{6} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{12} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{24} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{3} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} \boxed{\phantom{>}} \frac{1}{5}$$

# Sezione 2

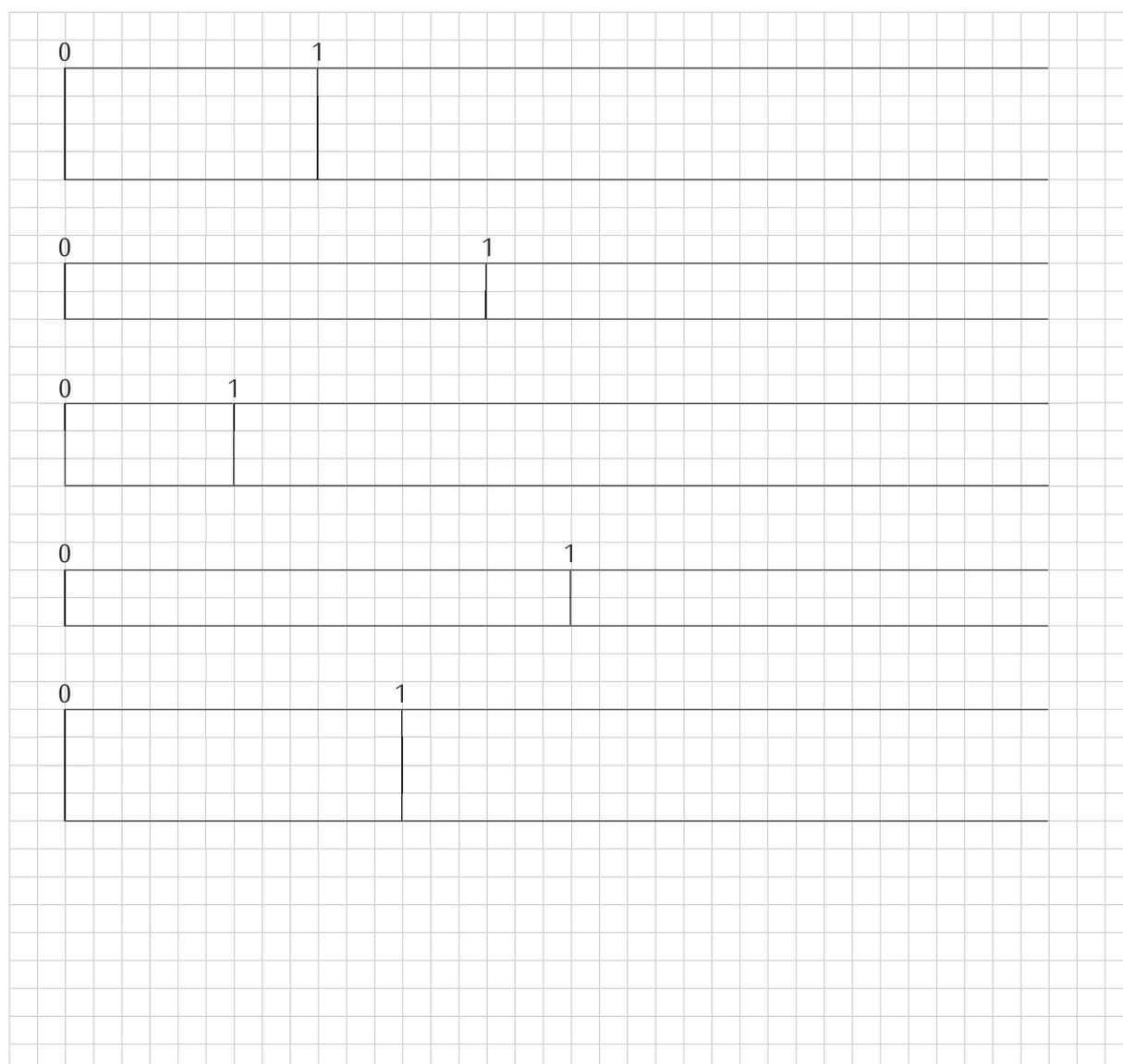
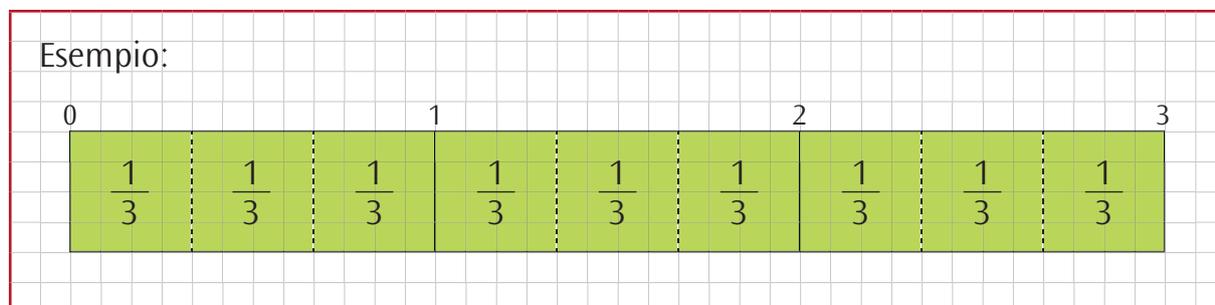
## OLTRE L'UNITÀ DI MISURA CON LA STRISCIA

- Introduzione all'artefatto
- Guida alle attività per l'insegnante
- Materiali operativi per l'alunno

## SCHEDA 3

- Riporta l'unità di misura sulla striscia tutte le volte che puoi, poi individua tutti i terzi e colorali.

Esempio:



## SCHEDA 5

- Scrivi le frazioni indicate nei cartellini giusti.

